

0017-9310(94)00206-1

# Etude de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes—III

M. T. OUAZZANI† et J. K. PLATTEN  
 Université de Mons-Hainaut, B-7000 Mons, Belgique

et

H. W. MÜLLER‡ et M. LÜCKE  
 Universität des Saarlandes, D-66041, Saarbrücken, Allemagne

(Received 15 July 1993 and in final form 27 June 1994)

**Resumé**—Nous montrons, par une étude expérimentale utilisant la vélocimétrie laser-Doppler, que l'instabilité de l'état de repos dans le problème de la convection mixte (c'est à dire libre et forcée) ne se compare pas avec la courbe théorique correspondant à l'instabilité neutre, mais bien à celle de l'instabilité convective. Dès lors nous mesurons l'amplitude de la vitesse dans les rouleaux thermoconvectifs en fonction de la direction de l'écoulement et nous comparons avec les valeurs prédites d'une équation d'amplitude, décrivant une dynamique idéalisée bidimensionnelle.

## INTRODUCTION

Dans deux articles précédents parus dans la même revue [1, 2] nous avons étudié, numériquement et expérimentalement, la convection (surtout la naissance) dans un canal de section rectangulaire, horizontal et d'extension 'infinie' (c'est-à-dire long par rapport à sa hauteur), lorsque l'écoulement de base, de type Poiseuille, est déstabilisé par un chauffage par le bas (Fig. 1).

L'écoulement de base est caractérisé par son nombre de Reynolds  $Re$ , tandis que le chauffage est caractérisé par son nombre de Rayleigh  $Ra$ . La géométrie est caractérisée par un rapport de forme  $B = l/h$ , où  $l$  est la largeur du canal et  $h$  sa hauteur. La longueur du canal  $L$  n'intervient pas, car elle est supposée très grande par rapport à  $h$  ( $L \gg h$ ). Dès lors, la naissance des rouleaux thermoconvectifs dépend de  $Ra$ ,  $Re$ ,  $Pr$  (nombre de Prandtl) et de  $B = l/h$ . Pour un rapport de forme fixé, et lorsque l'écoulement domine ( $Re \gg 1$ ), les rouleaux sont alignés avec leur axe parallèle à la direction de l'écoulement (rouleaux longitudinaux); le nombre de Rayleigh critique (noté  $Ra_T^{crit}$ ) est dans ce cas indépendant du nombre de Reynolds conformément à la théorie linéaire. Par contre, à faible nombre de Reynolds ( $Re \ll 1$ ) l'effet des bords latéraux est dominant et les rouleaux thermoconvectifs sont disposés avec leurs axes perpendiculaires à la direction de l'écoulement, puisque au repos ( $Re = 0$ ) il est bien connu que les rouleaux

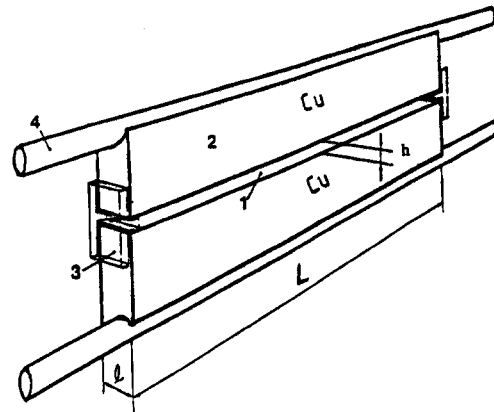


Fig. 1. Schéma de la cellule expérimentale: (1) canal d'observation; (2) blocs de cuivre thermostatés; (3) joints en plexiglas; de petits trous pratiqués dans ces joints permettent l'entrée et la sortie du liquide; (4) conduits d'eau thermostatés

sont parallèles au plus petit côté de la cavité [3, 4]. Ils sont alors dits 'transversaux'. Le nombre de Rayleigh critique correspondant à la naissance des rouleaux transversaux (noté  $Ra_T^{crit}$ ) est une fonction croissante du nombre de Reynolds; il dépend aussi de  $Pr$ .

Dans cet article nous comparons les valeurs expérimentales de  $Ra_T^{crit}(Re)$  avec les prédictions de la théorie linéaire dite de la 'stabilité neutre', ainsi qu'avec celle dite de la 'stabilité convective'. L'accord avec seulement cette dernière théorie est obtenu.

Dès lors, nous mesurons l'amplitude de la vitesse dans les rouleaux transversaux à différents endroits de la cavité, et nous comparons avec les prédictions d'une

† Adresse permanente: Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, BP765 Agdal-Rabat, Maroc.

‡ Aussi à: Ecole Normale Supérieure de Lyon, 69 364, Lyon, France.

## NOMENCLATURE

$x, y, z$	coordonnées spatiales ( $z$ est vertical et $x$ est dans le sens de l'écoulement)	$Re$	nombre de Reynolds
$L, l, h$	dimensions de la cellule expérimentale dans les directions $x, y, z$	$V_g$	vitesse de groupe
$A$	amplitude des rouleaux transverses	$W$	composante verticale de la vitesse.
$B$	rapport de forme $l/h$	Symboles grecs	
$g$	accélération de la pesanteur	$\alpha$	coefficient de dilatation
$l_c$	valeur de la distance à laquelle l'amplitude atteint la moitié de la valeur de saturation	$\varepsilon$	écart relatif au point critique à $Re = 0$
$Pr$	nombre de Prandtl	$\xi_0, \xi^+$	longeurs caractéristiques
$Ra$	nombre de Rayleigh	$\kappa$	diffusivité thermique
$Ra_{\parallel}^{crit}$	nombre de Rayleigh critique pour les rouleaux longitudinaux	$\mu$	écart relatif au point critique, fonction de $Re$
$Ra_{\perp}^{crit}$	nombre de Rayleigh critique pour les rouleaux transverses	$\nu$	viscosité cinématique
		$\tau_0$	temps caractéristique
		$\Delta T$	écart de température imposé à la couche fluide.

équation d'amplitude, décrivant une dynamique idéalisée bidimensionnelle.

Le canal et le dispositif expérimental ont été décrit dans la ref. [2]. Dès lors nous n'y reviendrons pas, si ce n'est que nous reproduisons à la Fig. 1 le schéma du canal.

## COMPARAISON AVEC LA 'THÉORIE LINÉAIRE DE LA STABILITÉ'

(a) Les expériences qui ont été faites dans l'eau comme fluide de travail sont résumées dans la Fig. 9 de la ref. [2]. Pour des questions de facilités, car nous allons continuellement nous y référer, nous reproduisons cette figure (voir Fig. 2)

Au repos ( $Re = 0$ ), le nombre de Rayleigh critique est légèrement supérieur à la valeur 1707.762 obtenue pour une couche d'extension horizontale infinie dans

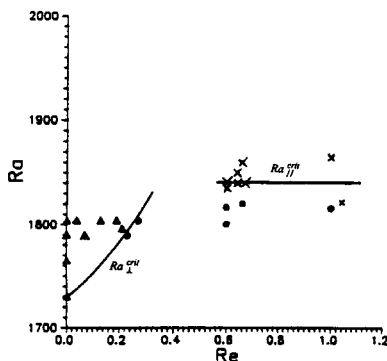


Fig. 2. Représentation dans le plan ( $Ra-Re$ ) des transitions entre un écoulement de Poiseuille (●) et une convection sous forme de rouleaux transversaux (▲) ou sous forme de rouleaux longitudinaux (×), d'après la ref. [2].

les deux directions. En tenant compte de l'effet des bords latéraux, c'est à dire du rapport de forme  $B = l/h \cong 3.6$ , on peut estimer à  $Re = 0$  que  $Ra_{\perp}^{crit} \cong 1730$  [5].

Les résultats sont les suivants :

Lorsque  $1730 < Ra < 1840$  nous observons :

- (1) Des rouleaux transversaux pour des petits débits, c'est-à-dire pour des nombres  $Re$  se situant à gauche de la courbe  $Ra_{\perp}^{crit}$  de la Fig. 2.
- (2) L'écoulement de Poiseuille non isotherme à plus grand nombre de Reynolds c'est-à-dire pour des nombres  $Re$  se situant à droite de la courbe  $Ra_{\perp}^{crit}$  de la Fig. 2.

Donc nous sommes capable de dessiner la courbe critique  $Ra_{\perp}^{crit}$  en fonction de  $Re$ . Cette courbe est cependant limitée à  $Re \cong 0.3$ .

Si  $Re > 0.3$ , les rouleaux deviennent longitudinaux si  $Ra > Ra_{\parallel}^{crit}$ .

(b) Si on considère une petite perturbation, spatialement localisée, il existe trois types distincts de comportements que cette perturbation localisée peut subir.

Si l'état de référence est **absolument stable**, la perturbation sera amortie dans tout système de référence. Si l'état est **absolument instable**, les bords de la perturbation se propageront dans des sens inverses et par conséquent, la perturbation s'accroîtra en tout point fixe donné, produisant asymptotiquement, lorsqu'elle sature tout le système à cause des non linéarités, un motif périodique.

Si l'état est **convectivement instable** (c'est à dire spatialement instable), la perturbation s'amortira pour  $t \rightarrow \infty$  en tout point fixe donné, mais s'accroîtra dans un système de référence en mouvement ; les deux bords de la perturbation se déplacent dans le même sens ; le

motif qui en résulte se déplace spatialement et peut éventuellement quitter les limites du système. Par conséquent, une perturbation unique produit seulement un motif temporaire et le système retourne asymptotiquement à l'état stationnaire. Il est alors nécessaire de perturber le système de manière continue. Généralement, le 'bruit' (l'ensemble des perturbations) va être amplifié de manière sélective [6, 7], certains nombres d'onde seront plus amplifiés que d'autres, certains autres étant amortis. Ce mécanisme produit des ondes spatialement amplifiées et est responsable de la sélection de la longueur d'onde du motif qui se forme. Comme le bruit est amplifié de manière exponentielle, le bruit 'naturel', inhérent à tout système physique, devrait en général être suffisant pour produire une structure spatio-temporelle.

Récemment, Müller *et al.* [8, 9] ont fait une analyse de stabilité neutre et d'instabilité convective pour un nombre de Prandtl unitaire ( $Pr = 1$ ). Ils ont réalisé une investigation de la convection de Rayleigh-Bénard en présence d'un écoulement horizontal forcé avec une équation d'amplitude (unidimensionnelle), puis à l'aide d'une simulation numérique bidimensionnelle des équations de base de l'hydrodynamique. Ils ont déterminé la région dans laquelle l'état de base de conduction est stable [pour  $\varepsilon = (Ra/1707.8) - 1 < \varepsilon^c$ , où  $\varepsilon^c(Re)$  est la courbe de la stabilité neutre], la région d'instabilité convective (pour  $\varepsilon^c < \varepsilon < \varepsilon^{conv}$ ) ainsi que la région d'instabilité absolue (pour  $\varepsilon > \varepsilon^{conv}$ ), voir Fig. 3.

(c) La courbe de transition expérimentale  $Ra_{\perp}^{crit}$  donnée à la Fig. 2, ne se compare pas favorablement à la courbe de la stabilité neutre donnée par Luijckx [5] pour un nombre de Prandtl de 10 (voisin de celui de l'eau). Dès lors il est très tentant de comparer les résultats expérimentaux de la ref. [2], reproduits à la Fig. 2, avec les prévisions de Müller *et al.* [8, 9]. Les calculs théoriques des refs. [8, 9] ont été répétés pour l'eau, c'est à dire pour  $Pr \cong 7$ , en réalité,  $Pr = 6.4$  correspondant à la température moyenne des expériences. Cependant, pour tenir compte des effets de bords latéraux, nous avons utilisé dans la définition du paramètre  $\varepsilon$ , la valeur  $Ra^0 = 1730$  au lieu de 1707.8 pour le nombre de Rayleigh critique en l'absence de convection forcée. Rappelons que les travaux de Müller *et al.* [8, 9], conduisent à une équation d'am-

plitude  $A$ , qui décrit l'évolution non linéaire d'une onde propagative, et recopiée ci-dessous :

$$\tau_0(\partial_t + V_g \partial_x)A = [\mu(1 + ic_0) + \xi_0^2(1 + ic_1)\partial_x^2 - \gamma(1 + ic_2)|A|^2]A \quad (1)$$

avec

$$\mu = \frac{Ra - Ra^c(Re)}{Ra^c(Re)} = \frac{\varepsilon - \varepsilon^c(Re)}{1 + \varepsilon^c(Re)}$$

$$c_0 = 0.0183$$

$$c_1 = 0.0199$$

$$c_2 = 0.0066$$

$$V_g = 8.301$$

$$\tau_0 = 5.496 \times 10^{-2}$$

$$\xi_0^2 = 0.148$$

$$\gamma = 0.699.$$

Dans cette équation d'amplitude, la vitesse de groupe  $V_g$ , ainsi que coefficients  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$  sont proportionnel à  $Re$ , en première approximation (des termes en  $Re^2$  n'apparaissent pas, car ces coefficients sont des fonctions impaires de  $Re$  pour des raisons de symétrie : ils doivent changer de signe si on renverse la direction de l'écoulement, c'est-à-dire si  $Re \rightarrow -Re$ ), tandis que les coefficients  $\tau_0$ ,  $\xi_0^2$  et  $\gamma$  sont indépendants de  $Re$ . Les valeurs numériques indiquées sont uniquement valables pour  $Pr = 6.4$ . Müller *et al.* [8, 9] montrent que l'amplitude de la perturbation  $A(x_0, t \rightarrow \infty)$  en une position fixe  $x_0$  et pour des temps longs est proportionnelle à

$$\exp \left\{ \left( \frac{\mu}{\tau_0} - \frac{V_g^2 \tau_0}{4\xi_0^2(1+c_1^2)} \right) t \right\}.$$

Dès lors on aura :

Stabilité absolue si  $\mu < 0$

Instabilité absolue si  $\mu > \mu^{conv} = \frac{V_g^2 \tau_0^2}{4\xi_0^2(1+c_1^2)}$

Instabilité convective si  $0 < \mu < \mu^{conv}$ .

Les résultats expérimentaux de la Fig. 2, de même que les résultats théoriques de la Fig. 3, mais recalculés pour  $Pr = 6.4$  conformément aux valeurs numériques des coefficients de l'équation d'amplitude (1) donnés après cette équation, sont confrontés à la Fig. 4.

Il est clair que la courbe de transition expérimentale  $Ra_{\perp}^{crit}$  n'a rien à voir avec la courbe de stabilité neutre ; elle est cependant proche de la courbe d'instabilité convective. Notons que, au moment où l'article [2] a été rédigé, nous n'avions pas connaissance des travaux de Müller *et al.* [8, 9]. Dès lors, comme il fallait bien enregistrer la vitesse quelque part, mais loin de la zone d'entrée et de sortie, nos mesures ont été prises arbitrairement en  $x = 65$  mm dans une cellule de longueur  $\cong 112$  mm [2]. Si les mesures avaient été prises

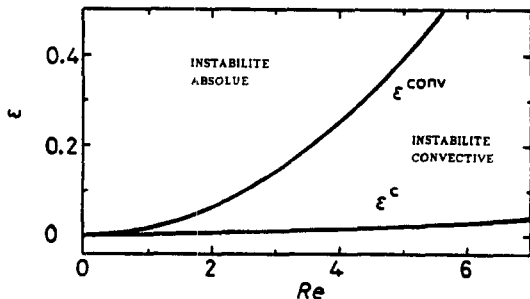


Fig. 3. Régions d'instabilité convective et absolue pour  $Pr = 1$ , d'après la ref. [8].

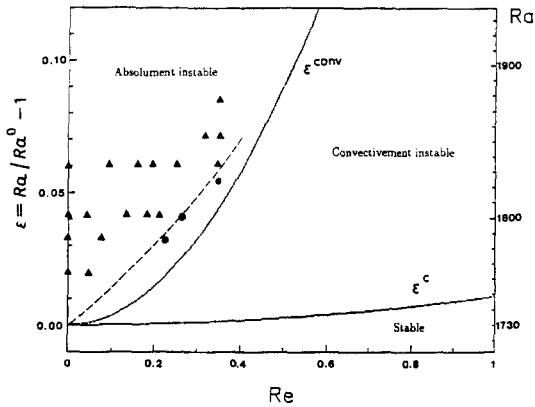


Fig. 4. Courbe expérimentale (---) correspondant à la transition entre rouleaux transversaux (▲) et écoulement de Poiseuille (●), comparée aux courbes théoriques de stabilité marginale  $\varepsilon^c(Re)$  et d'instabilité convective  $\varepsilon^{conv}(Re)$ .

plus loin ( $x > 65$  mm) dans un canal encore plus long, alors la courbe expérimentale aurait pu être déplacée légèrement vers la droite, en ce sens que, quand nous avons observé l'absence de rouleaux transversaux en  $x = 65$  mm, il se peut que deux ou trois rouleaux se soient quand même formés un peu plus loin ( $65 \text{ mm} < x < 112 \text{ mm}$ ). Outre cette raison pour expliquer le léger désaccord entre la courbe expérimentale et  $\varepsilon^{conv}$ , notons deux raisons 'théoriques' possibles. D'abord, pour tenir compte de l'influence stabilisante des bords latéraux, on a simplement dans la définition de  $\varepsilon$ , remplacé la valeur 1707.8 par la valeur 1730. Ceci n'est pas une manière stricte de tenir compte des bords latéraux car on continue par faire l'hypothèse simplificatrice d'une dynamique bidimensionnelle, ce qui n'est fondamentalement pas vrai (voir à ce sujet la discussion et les différences entre 'rouleaux transverses' et 'structure tridimensionnelle' dans les refs. [5, 10, 11]). Ensuite, le calcul de  $\varepsilon^{conv}$  est basé sur une équation d'amplitude et n'est pas dérivé directement des équations de base de l'hydrodynamique, comme le font Babcock *et al.* [12] ainsi que Tsameret et Steinberg [13] dans le problème de Taylor-Couette avec écoulement. La méthode utilisant une équation d'amplitude néglige des termes d'ordre supérieur. Donc théoriquement, dans la région d'instabilité convective, une perturbation initiale unique meurt pour des temps longs en  $x \approx 65$  mm (le point de mesure), malgré sa croissance dans un système de référence en mouvement. L'écoulement l'emporte à l'extérieur du canal, forcément de longueur finie dans toute expérience de laboratoire. Par contre, une perturbation permanente (à l'entrée par exemple) produit un motif convectif stationnaire [7]. On peut quand même affirmer qu'il y a un accord raisonnable entre les prédictions théoriques de Müller *et al.* [9] et les résultats expérimentaux obtenus par l'anémométrie laser.

Dès lors il est aussi tentant de vérifier expérimentalement d'autres prévisions théoriques, notamment la manière dont varie l'amplitude  $A(x)$  en

fonction de la coordonnée de l'écoulement, et c'est l'objet essentiel de cet article.

En effet, un état d'ondes progressives est localisé de plus en plus proche de la sortie du canal par augmentation du nombre de Reynolds. La distance à partir de l'entrée, nécessaire à l'existence d'un tel état dans le canal, diverge pour un  $Re$  particulier. Dans ce cas la vitesse de groupe  $V_g$  atteint sa valeur critique qui caractérise la ligne séparant l'instabilité absolue de l'instabilité convective [14].

#### DIFFICULTÉS LIÉES À LA MESURE DE L'AMPLITUDE

Rappelons que les rouleaux transversaux ne sont observés que dans une toute petite région du plan  $Ra-Re$ , la région hachurée à la Fig. 5.

Lorsque  $Ra > 1840$ , les rouleaux sont en principe longitudinaux et la théorie simplifiée de Müller *et al.* [9] ne les étudie pas. Notons cependant un modèle simple récent [15] décrivant la compétition entre rouleaux transverses et longitudinaux, ainsi qu'une discussion quantitative [16] de ce problème où deux équations d'amplitude couplées pour les rouleaux transverses et longitudinaux ont été écrites à partir des équations de l'hydrodynamique et étudiées analytiquement et numériquement.

Dans la Fig. 5, la valeur  $Ra^0 = 1730$  est caractéristique de notre rapport de forme  $B = l/h \approx 3.6$ . La valeur de  $Re \approx 0.3$  est elle caractéristique du fluide étudié (l'eau), c'est à dire du nombre de Prandtl.

On pourrait songer à étendre cette zone hachurée en prenant un canal ayant un autre rapport de forme, par exemple  $l/h < 1$  ne permettant même plus à un seul rouleau longitudinal de se former, mais alors  $Ra^0$  serait très nettement supérieur à 1707.8 par exemple quelques milliers, disons  $Ra^0 \approx 5000$  pour fixer les idées, et les gradients thermiques nécessaires pour obtenir de tels nombres de Rayleigh seraient tellement grands qu'on serait en droit de mettre en doute

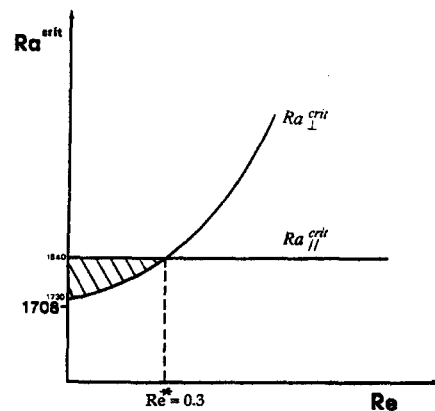


Fig. 5. La partie hachurée représente schématiquement la région où les rouleaux transversaux peuvent être observés dans une canalisation de rapport de forme  $l/h \approx 3.6$ , le fluide étant l'eau ( $Pr \approx 6.4$ ).

l'hypothèse d'un fluide obéissant aux équations de Boussinesq. On pourrait éventuellement augmenter la hauteur  $h$  pour réduire le gradient thermique, mais alors l'hypothèse d'un canal 'infini' deviendrait de moins en moins vraisemblable, à moins d'augmenter également sa longueur  $L$ , ce qui implique des difficultés de thermostatisation uniforme des plaques limites inférieure et supérieure.

On pourrait changer de fluide pour étendre la région au delà de  $Re \cong 0.3$ , soit donc prendre des fluides de nombre de Prandtl plus petit que 7 (par exemple l'air, ou le mercure, ou des métaux liquides). Cette éventualité n'a pas été retenue et les expériences présentes constituent un compromis entre la facilité expérimentale (la réalité du laboratoire) et la théorie qui étudie une chaîne de rouleaux unidimensionnels.

Étant donné la définition du nombre de Rayleigh ( $Ra = g\alpha\Delta Th^3/\kappa\nu$ ), et les valeurs des coefficients d'expansion thermique  $\alpha$ , de viscosité cinématique  $\nu$ , de diffusivité thermique  $\kappa$  et l'épaisseur de la cellule  $h$ , on peut calculer qu'une fluctuation de  $0.01^\circ\text{C}$  dans l'écart de température  $\Delta T$  induit une fluctuation de 12 unités dans  $Ra$ .

Sans changer les températures affichées des thermostats régulant les températures des plaques inférieure froide et supérieure chaude, on observe généralement, avec les thermostats commerciaux, des fluctuations de l'ordre de  $0.015^\circ\text{C}$  dans  $\Delta T$  ('mauvais contrôle de température') auxquelles correspondent des fluctuations de 18 unités dans  $Ra$ . Typiquement, si  $Ra$  change de 1825 à 1843, la valeur de

$$\varepsilon^{1/2} = (Ra/1730 - 1)^{1/2}$$

fluctue de 0.2343 à 0.2544, soit au moins 8%. Les fluctuations relatives dans  $\mu$  sont encore plus grandes, puisque  $\mu$  mesure l'écart entre  $Ra$  et  $Ra^{crit}$  ( $Re$ ) et non pas entre  $Ra$  et 1730. Dès lors des fluctuations de 8 à 10% dans l'amplitude de la vitesse sont inévitables. A titre d'exemple, lorsque le nombre de Reynolds  $Re$ , est augmenté de  $Re = 0.144$  à  $Re = 0.157$ , on devrait normalement observer à  $x_0$  fixé, une diminution dans l'amplitude des rouleaux puisque  $\mu$  a diminué; au contraire nous avons observé une légère augmentation

dans l'amplitude parce que au même moment, le nombre de Rayleigh, suite à une fluctuation de  $\Delta T$ , a augmenté par exemple de 20 unités. Que se passe-t-il si  $Ra$  devient momentanément supérieur à 1840 suite à une telle fluctuation de  $\Delta T$ ? Il devrait y avoir une compétition entre les rouleaux transversaux et longitudinaux, conduisant à des phénomènes d'intermittence [17].

Pour donner un exemple de ces effets de fluctuations non contrôlables dans  $Ra$ , nous avons à nombre de Reynolds fixé ( $Re = 0.35$ ) et  $x_0 = 65$  mm mesuré au cours du temps l'amplitude des rouleaux transversaux lors de variations volontaires, mais faibles, de  $Ra$ , en changeant la température du bain chaud (Fig. 6). Initialement, on avait  $Ra = 1878$  (les rouleaux transversaux avaient été créés à  $Re = 0$ , avant d'imposer  $Re = 0.35$ , ce qui permet de les maintenir pendant un certain temps). Ensuite on diminue volontairement  $\Delta T$  de  $0.04^\circ\text{C}$  pour obtenir un nombre de Rayleigh intermédiaire de 1825; enfin on réaugmente  $\Delta T$  de  $0.01^\circ\text{C}$  (la résolution de nos thermostats) pour avoir  $Ra = 1836$ .

La Fig. 6 montre l'évolution temporelle de la vitesse verticale.

Dans cette figure, on observe clairement que la nouvelle amplitude à  $Ra = 1836$  est plus petite que l'amplitude initiale à  $Ra = 1878$ . Et, la situation est bien pire encore à  $Ra \cong 1770$ , c'est à dire plus proche de 1730. Dans ce cas nous avons même des difficultés à  $Re = 0$ , car les rouleaux n'étaient pas présents partout, notamment proche de l'entrée du canal, entre  $x = 0$  et  $x \cong 20$  mm ('entrée' est un mauvais mot à  $Re = 0$ !). L'absence de rouleaux proche d'un des bords, pourrait être imputable à un 'effet de bord'. Mais nous pensons surtout à des fluctuations de  $Ra$  le long de l'axe du canal, pas tellement liées à des fluctuations de température, mais à un mauvais parallélisme des plaques inférieure et supérieure (fluctuation dans  $h$ ). Nous avons travaillé avec un canal de hauteur moyenne  $h = 4.15$  mm avec des fluctuations  $\delta h \cong 0.05$  mm, soit donc 1.2%. Puisque  $Ra \propto h^3$ , ceci induit des fluctuations de 3.6% dans  $Ra$ , c'est à dire de 64 unités si  $Ra = 1770$ . Donc tout ce que l'on

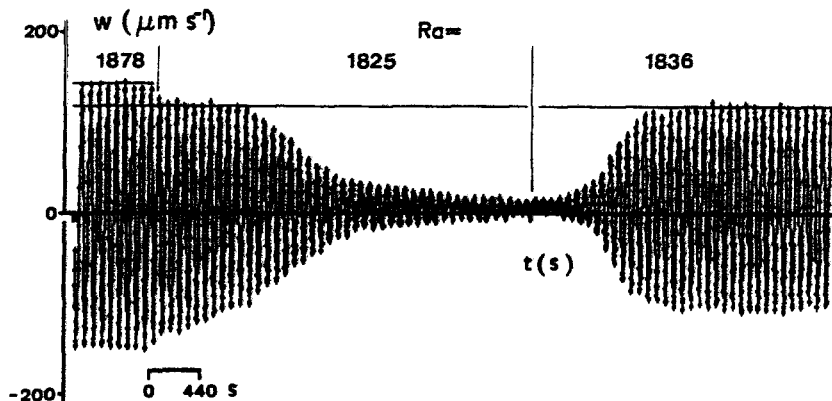


Fig. 6. Influence de légères variations de  $Ra$  sur l'amplitude de la convection.

peut dire, c'est que  $1740 < Ra < 1800$ . Ceci change de manière dramatique la valeur de  $\varepsilon$  le long de l'axe  $x$  et il pourrait être légèrement sous critique à certains endroits.

Enfin il ne faut pas oublier les fluctuations dans le nombre de Reynolds. Au lieu d'utiliser comme dans la ref. [2] un 'bac à niveau constant', nous avons utilisé pour créer le mouvement, une pompe péristaltique. Si l' 'électronique' est très stable (stabilité du nombre de tours par minute), il n'en va pas de même pour les tuyaux en plastique (de diamètre intérieur petit, c'est-à-dire 0.1 mm pour obtenir des écoulements lents,  $Re \cong 0.1$ ), à l'intérieur desquels les particules traçantes utilisées en anémométrie laser (des sphères de

latex) pourraient former des agrégats, avec obstruction partielle de ces tuyaux plastiques. Nous estimons qu'une variation de 0.005 unités dans  $Re$  est inévitable.

Cette longue discussion sur les difficultés expérimentales, nous semblait nécessaire pour mieux comprendre la difficulté dans l'obtention des résultats expérimentaux reportés dans le paragraphe suivant.

### MESURE DE L'AMPLITUDE DES ROULEAUX

#### *Instabilité convective à $Ra \cong 1836$*

Une première série d'expériences est effectuée à  $Ra = 1836 \pm 12$ , c'est à dire le plus loin possible de  $Ra^0 = 1730$ , tout en restant, pour autant que possible

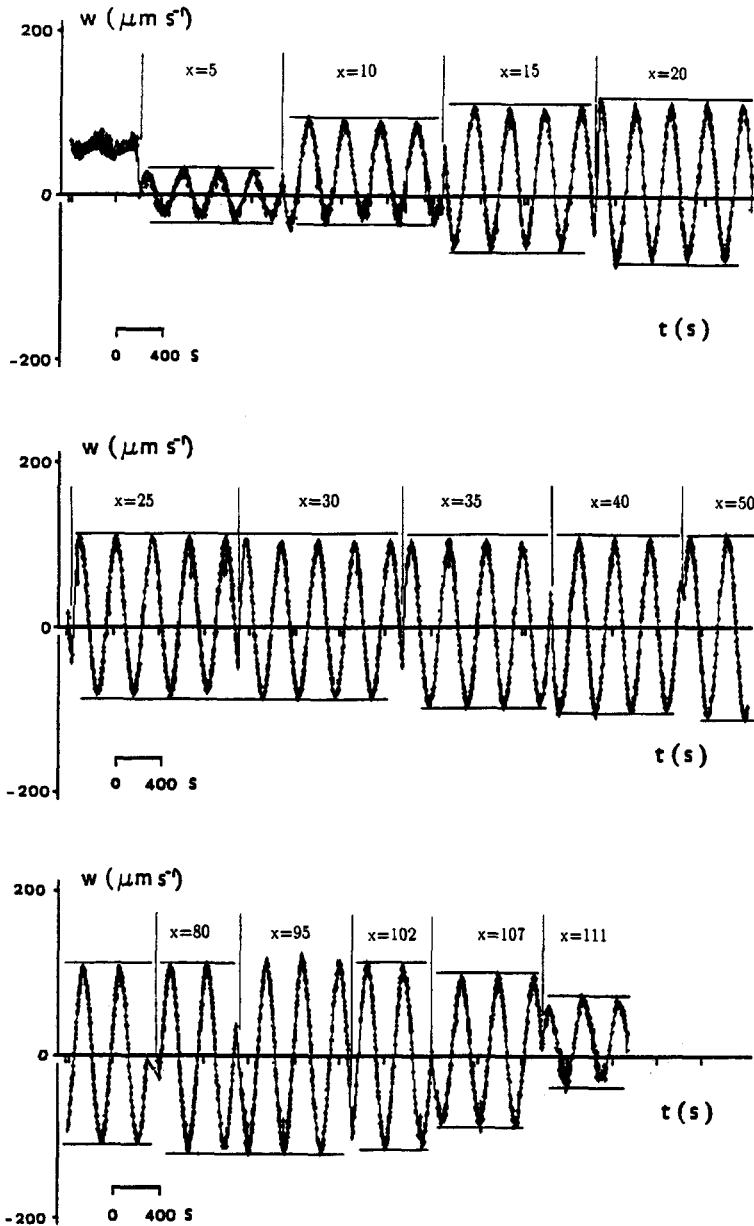


Fig. 7. Variation de la vitesse verticale dans les rouleaux transversaux à  $Ra = 1836$ ;  $Re = 0.09$ ;  $y = l/2$ ;  $z = h/2$  et  $5 < x < 111$  ( $x$  en mm).

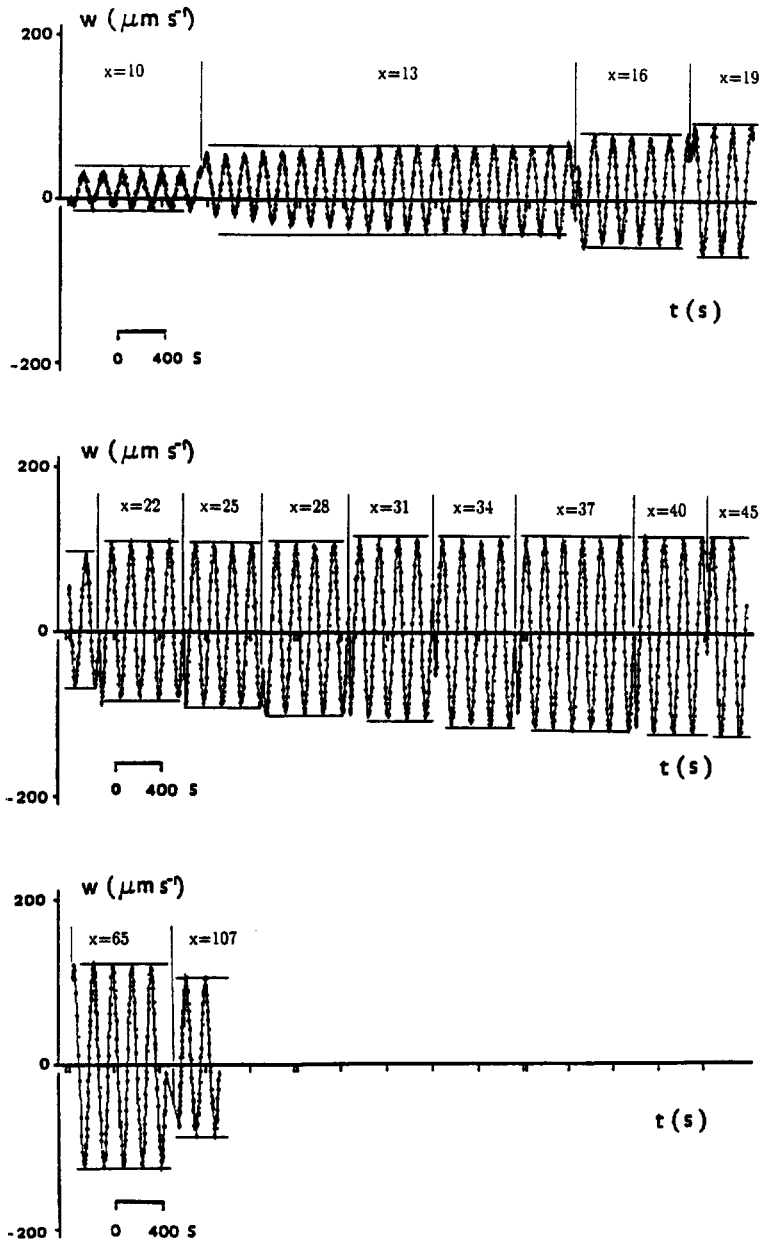


Fig. 8. Variation de la vitesse verticale dans les rouleaux transversaux à  $Ra = 1842$ ;  $Re = 0.16$ ;  $y = l/2$ ,  $z = h/2$  et  $10 < x < 107$  ( $x$  en mm).

en dessous de 1840 pour éviter la formation de rouleaux longitudinaux. Dans cette première série d'expériences, nous voulons observer la transition de rouleaux transversaux vers l'écoulement de Poiseuille par augmentation de  $Re$ . La première étape consiste à chauffer le système par le bas (jusqu'à  $Ra = 1836$ ), à  $Re = 0$ , induisant des rouleaux transversaux parallèles au plus petit des côtés.

Ces rouleaux se déplacent dans la direction  $x$  lorsqu'un écoulement forcé est imposé. On prendra successivement  $Re = 0.09$ ;  $0.12$ ;  $0.14$ ;  $0.16$ ;  $0.19$ ;  $0.21$ ;  $0.25$  et  $0.32$ . On mesure la vitesse verticale  $W(t)$  en  $y = l/2$ ,  $z = h/2$  et en différentes abscisses  $x$ .

La Fig. 7 montre  $W(t)$  pour  $Ra = 1836$ ,  $Re = 0.09$  et  $5 \text{ mm} < x < 111 \text{ mm}$ .

L'amplitude ( $W^{\max} - W^{\min}$ ) croît avec  $x$ , sauf près de la sortie ( $x > 102$ ) où elle décroît, conformément à la condition de vitesse nulle à la sortie en  $x = 112 \text{ mm}$ .

Pour des raisons peu claires, l'oscillation  $W(t)$  n'a pas lieu autour d'une valeur moyenne nulle pour des petites valeurs de  $x$  ( $x = 10, 15$  ou  $20 \text{ mm}$ ). Mais loin de l'entrée, l'oscillation présente une valeur moyenne nulle. L'explication possible que nous proposons est liée au fait que la structure de l'écoulement de base n'est pas symétrique à l'entrée du canal, à cause des conditions à l'entrée, (la composante verticale de la

vitesse dans l'écoulement de base en  $x = 0$  n'est pas symétrique par rapport à  $z = h/2$ , elle ne s'annule donc pas en  $z = h/2$ , contrairement à des conditions d'entrée idéales, mais ceci n'a pas été mesuré). Une explication plutôt théorique peut être trouvée dans ref. [16], en particulier dans la Fig. 3(d) de cette référence qui montre un état constitué de rouleaux transverses avec une légère contribution due aux rouleaux longitudinaux. Cette contribution pourrait expliquer l'asymétrie des oscillations des Figs. 6-8 du présent travail.

Un exemple supplémentaire est donné à la Fig. 8 pour  $Ra = 1842$  (notez la petite fluctuation en  $Ra$ ) et  $Re = 0.16$ .

En comparant les Figs. 7 et 8, nous pouvons facilement déduire que, pour une abscisse  $x$  donnée, l'amplitude de la vitesse diminue quand  $Re$  augmente. Prenons un exemple: pour  $Re = 0.09$ , la valeur de l'amplitude ( $W^{max} - W^{min}$ ) en  $x = 10$  mm est égale à 60% de la valeur maximale de saturation, alors qu'elle ne dépasse pas 20% de l'amplitude de saturation à  $Re = 0.16$  pour la même position  $x = 10$  mm. Un tout

dernier exemple est donné à la Fig. 9 pour  $Re = 0.25$ , où nous n'avons pas mesuré d'oscillations temporelles à  $x = 10$  mm.

Puisque les oscillations ne sont pas toujours symétriques par rapport à  $W = 0$ , il est intéressant de porter en graphique

$$\frac{W^{max} + |W^{min}|}{2} = A(x).$$

La Fig. 10(a), montre les enveloppes expérimentales obtenues à  $Re = 0.09$ ,  $Re = 0.16$  et  $Re = 0.25$ , déduites des Figs. 7-9, de même que celles obtenues à  $Re = 0.19$ , à partir d'une figure semblable aux Figs. 7-9, qui n'est cependant pas donnée ici. La deuxième partie de la Fig. 10(b) montre les enveloppes théoriques calculées pour les mêmes nombres de Reynolds.

On peut donc remarquer, lorsque  $Re$  augmente et à  $Ra$  constant (à  $\pm 12$  unités près, lié à la précision des thermostats) que les rouleaux transversaux apparaissent dans le canal de plus en plus loin de l'entrée. Sans vouloir prétendre à une concordance parfaite

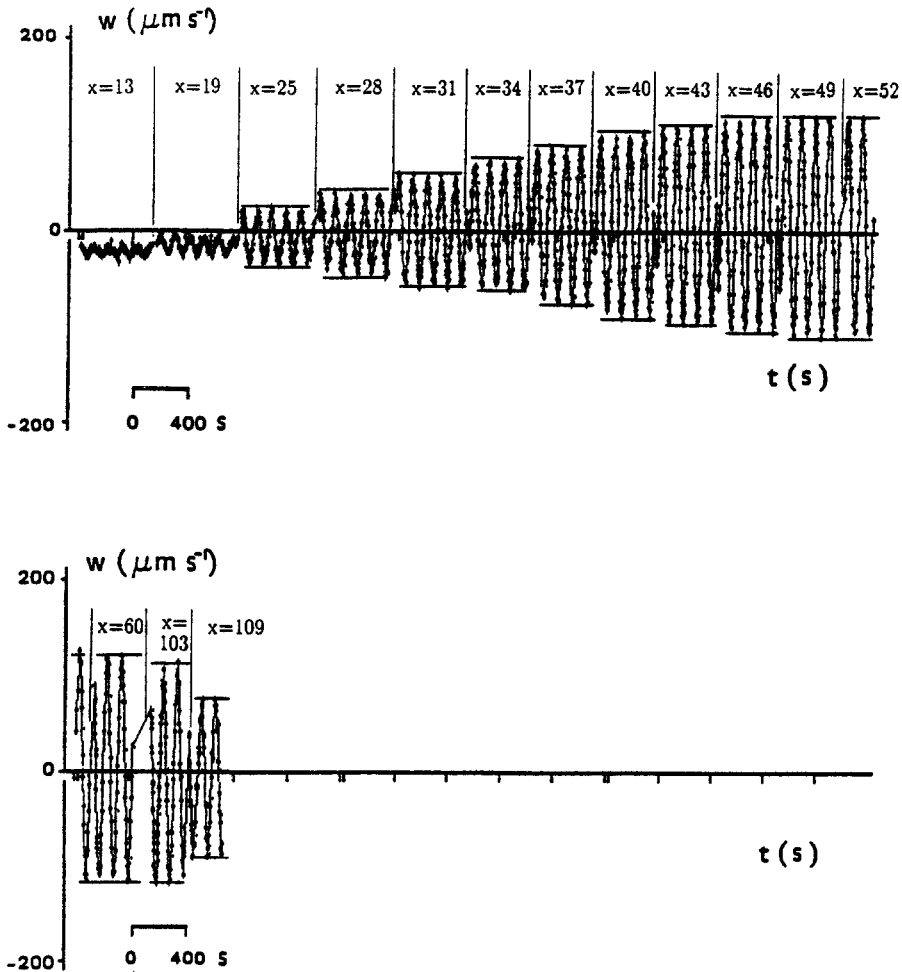


Fig. 9. Variation de la vitesse verticale dans les rouleaux transversaux à  $Ra = 1836$ ;  $Re = 0.25$ ;  $y = l/2$ ,  $z = l/2$  et  $13 < x < 109$  ( $x$  en mm).



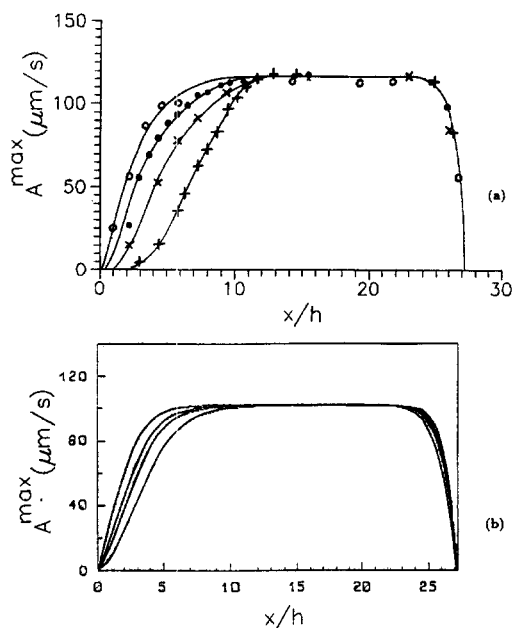


Fig. 10.  $A(x)$  pour  $Ra \approx 1836$  et  $Pr = 6.4$  (en  $y = l/2$ ;  $z = h/2$ ). (a) Enveloppes expérimentales pour: (O)  $Re = 0.09$ , (●)  $Re = 0.16$ , (x)  $Re = 0.19$ , (+)  $Re = 0.25$ . D'autres courbes pour d'autres  $Re$  existent mais ne sont pas présentées pour ne pas surcharger la figure. (b) Enveloppes théoriques déduites de l'équation d'amplitude (1) pour les mêmes nombres de Reynolds. Les valeurs adimensionnelles de  $A(x)$  sont rendues dimensionnelles pour une meilleure comparaison avec l'expérience.

entre les enveloppes expérimentales et théoriques, nous notons cependant une grande similitude, y compris l'amplitude de saturation, de l'ordre de  $100 \mu\text{m s}^{-1}$ . Nous avons déjà indiqué la simplicité du modèle théorique pour la détermination de  $\varepsilon^{\text{conv}}$ ; a fortiori les mêmes arguments peuvent être répétés lors de la comparaison des résultats 'non linéaires'.

Lorsque l'on passe à  $Re = 0.35$ , les rouleaux transversaux préexistant à des  $Re$  plus faibles, sont poussés hors du canal (voir Fig. 11 prise à  $x = 65 \text{ mm}$ ). Il est

évident qu'à d'autres abscisses  $x > 65 \text{ mm}$ , il n'y a plus non plus de rouleaux transversaux.

On peut définir une longueur  $l_e$  telle que si  $x = l_e$ , alors  $A(l_e)$  est égal à la moitié de l'amplitude de saturation. Cette valeur de  $l_e$ , réduite par  $h$ , se déduit immédiatement de la Fig. 10(a) pour sa valeur expérimentale, et de la Fig. 10(b) pour sa valeur théorique. A la Fig. 12, elle est portée en fonction du nombre de Reynolds. Notons hélas que  $Ra$  n'est pas rigoureusement constant dans nos expériences pour les raisons évoquées précédemment. La ligne en trait continu correspond à la meilleure courbe minimisant les écarts aux points expérimentaux; celle en trait discontinu à la solution de l'équation d'amplitude.

On remarquera sur cette figure que  $l_e^{\text{exp}} > l_e^{\text{théo}}$ , à  $Re$  fixe, mais que la différence s'estompe lorsque  $Re$  diminue. A  $Re = 0$ ,  $l_e/h$  tend vers 1 ou 1.2. En l'absence de convection forcée, il existe une longueur adimensionnelle d'influence des bords latéraux  $\xi^+ = 0.54 e^{1/2}$ , l'amplitude variant comme  $W = W^{\text{max}} \text{tgh}(x/\xi^+)$  (voir, par exemple, ref. [10]).  $W = \frac{1}{2} W^{\text{max}}$ , si  $\text{tgh}(x/\xi^+) = \frac{1}{2}$ , c'est à dire si  $x = 0.55 \xi^+$ . A  $Ra = 1836$ ,  $\xi^+ = 2.2$  et dès lors  $l_e/h_{\text{théo}} = 0.55 \xi^+ = 1.2$ . La valeur  $l_e/h \approx 1$  ou 1.2 (respectivement valeurs expérimentale et théorique), semble traduire une certaine influence du bord latéral gauche sur le phénomène convectif. D'un autre côté,  $l_e$  tend asymptotiquement vers l'infini lorsque  $Re$  atteint sa valeur critique de transition  $Re^{\text{crit}}(Ra)$ . Les rouleaux transversaux sont alors poussés complètement hors du canal.

*Instabilité convective à  $Ra \approx 1770$*

Puisque les mesures à  $Ra \approx 1836$  sont 'dangereuses', car à partir de  $Ra \approx 1840$  des rouleaux longitudinaux peuvent être observés, nous avons diminué le gradient thermique afin de ne pas avoir de compétition entre les rouleaux transversaux et longitudinaux lorsque  $Re$  augmente.

Nous avons fait une étude expérimentale des couples  $(Ra, Re)$  suivant: (1764; 0.02); (1774; 0.04),

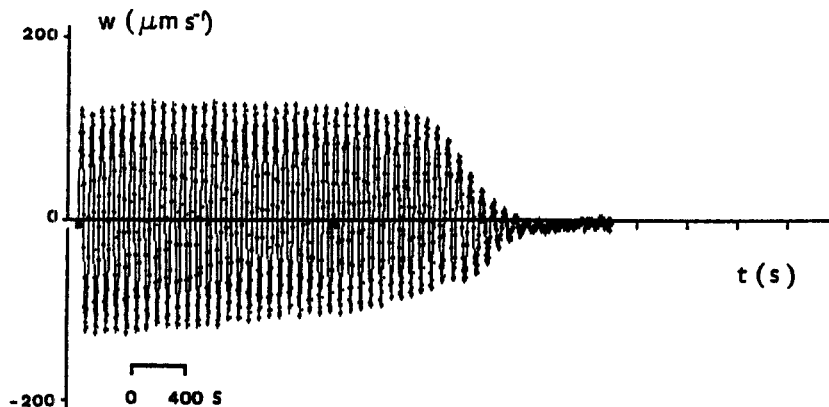


Fig. 11. Passage d'une structure en rouleaux transversaux vers l'écoulement de Poiseuille non isotherme à  $Ra = 1826$  et  $Re = 0.35$  ( $x = 65 \text{ mm}$ ).

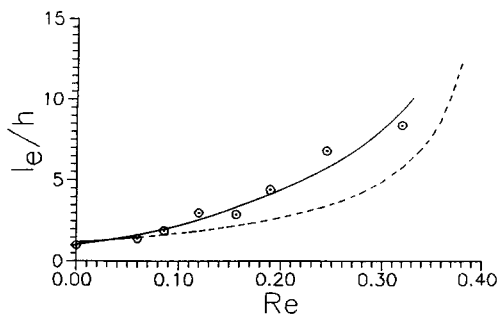


Fig. 12. Longueur  $l_e$ , comptée à partir de l'entrée jusqu'à la position où l'amplitude atteint la demi-valeur de l'amplitude de saturation lorsque  $Ra \cong 1836$ : (○) expérience, (---) courbe théorique déduite de l'équation d'amplitude (1).

(1760 ; 0.05). A nouveau, il n'a pas été possible d'une expérience à une autre de stabiliser mieux le nombre de Rayleigh et les valeurs données sont des valeurs 'moyennes' sur la durée d'une expérience à  $Re$  fixe. Il est à noter que lors des trois expériences, rien n'a été changé à la valeur de 'consigne' des thermostats. Les valeurs de  $Ra$  sont calculées d'après les trois valeurs différentes de  $\Delta T$ , trouvées par mesure de la température (au  $1/100^\circ\text{C}$ ) d'entrée et de sortie de l'eau de thermostatisation au niveau des plaques inférieure et supérieure.

La Fig. 13 donne l'enveloppe expérimentale obtenue pour les rouleaux transversaux.

A nouveau, l'influence du nombre de Reynolds est clairement montré : l'écoulement forcé pousse les rouleaux transversaux de plus en plus proche de la sortie.

L'amplitude maximale n'est cependant pas constante dans ces trois expériences et ce fait est lié à la fluctuation de  $Ra$ . En effet,

$$\text{si } Ra = 1760 \quad \varepsilon^{1/2} = \frac{1760 - 1730}{1730} \cong 0.13$$

$$\text{si } Ra = 1774 \quad \varepsilon^{1/2} = 0.16$$

soit une augmentation de plus de 20%. L'augmentation de l'amplitude maximale ( $72 \mu\text{m s}^{-1}$  à  $Ra = 1760$  et  $90 \mu\text{m s}^{-1}$  à  $Ra = 1774$ ) est effectivement compatible avec une augmentation de 20% dans  $\varepsilon^{1/2}$ , c'est à dire aussi dans  $\mu^{1/2}$ .

Enfin au plus grand nombre de Reynolds, on ne

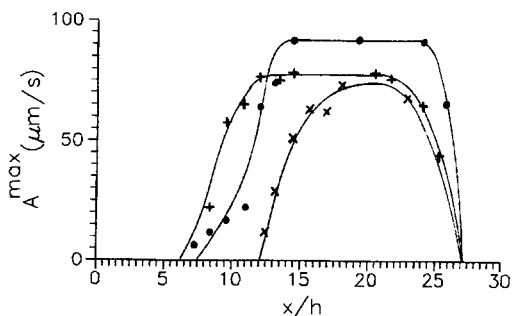


Fig. 13.  $A(x)$  pour :  $Ra = 1764$ ,  $Re = 0.02$  (+);  $Ra = 1774$ ,  $Re = 0.04$  (●);  $Ra = 1760$ ,  $Re = 0.05$  (x).

peut plus réellement dire que l'amplitude a atteint sa valeur de saturation.

#### Résultats à $Re = 0.04$ constant et $Ra$ variable

Dans une dernière série d'expériences, nous avons gardé le nombre de Reynolds constant  $Re = 0.04$  ( $\pm 0.005$ ), tandis que nous avons fait varier le nombre de Rayleigh. Des enregistrements de  $W(t)$ , comparables à ceux présentés aux Figs. 7-9 permettent de déduire  $A(x)$ , représenté à la Fig. 14.

Il est clair que à  $Re$  fixe, une augmentation de  $Ra$  permet la formation de rouleaux transversaux de plus en plus proche de l'entrée, et inversement une diminution de  $Ra$  les pousse de plus en plus loin de l'entrée. Ceci est tout à fait normal puisque une diminution de  $Ra$  diminue  $\mu$  et le rapproche de  $\mu^{\text{conv}}$  pour lequel  $l_e \rightarrow \infty$ .

Donc à  $Re$  fixe,  $l_e$  diverge quand  $Ra$  diminue. En conséquence, le palier horizontal dans la Fig. 14 est de plus en plus court lorsque le nombre de Rayleigh diminue.

Si la comparaison avec l'enveloppe théorique à  $Ra = 1842$  est très satisfaisante, il n'en est pas de même aux nombres de Rayleigh les plus faibles.

A notre avis, comme nous l'avons déjà signalé, de très légères fluctuations en valeurs absolues du nombre de Rayleigh, deviennent énormes en valeurs relatives sur  $\varepsilon$  ou  $\mu$  lorsqu'on se rapproche d'une courbe critique pour laquelle  $\varepsilon$  ou  $\mu \rightarrow 0$ .

## CONCLUSION

Malgré la difficulté des mesures liées à l'exiguïté de la région du plan  $Ra-Re$ , dans laquelle on peut observer des rouleaux transversaux, toutes les prévisions théoriques que l'on peut déduire de l'équation d'amplitude (1) ont été qualitativement vérifiées.

Sur le plan quantitatif, l'accord n'est pas mauvais aux nombres de Rayleigh les plus grands, tant en ce qui concerne la valeur de la saturation de l'amplitude que la mesure de  $l_e/h$ . On pourrait élargir la plage de mesure en prenant un rapport de forme  $B = 0.7$  par exemple pour lequel on trouve dans la ref. [5] que  $Ra_{\perp}^{\text{crit}} \cong 3000$  (au lieu de 1730) et  $Ra_{\parallel}^{\text{crit}} \cong 4750$  (au lieu de 1840). Cependant, l'amplitude de la convection va être fortement réduite par des bords latéraux fortement rapprochés, et de plus, selon la direction transversale  $y$ , elle n'atteindra pas un palier comme c'est le cas maintenant [2].

Il faudrait alors une théorie tridimensionnelle pour tenir compte de la dépendance de  $W$  en  $y$ . Un autre choix d'un fluide de travail, à nombre de Prandtl plus faible n'est pas évident : les gaz sont compressibles, le mercure non transparent pour l'anémométrie laser, les métaux liquides difficiles à mettre en oeuvre, l'acétone ( $Pr = 4$ ) très volatil et en plus il n'est pas prouvé que le passage de  $Pr \cong 7$  à  $Pr \cong 4$  soit suffisamment significatif. Nous croyons avoir fait le maximum qu'il soit possible de faire expérimentalement en vue d'une comparaison quantitative avec les théories simples.

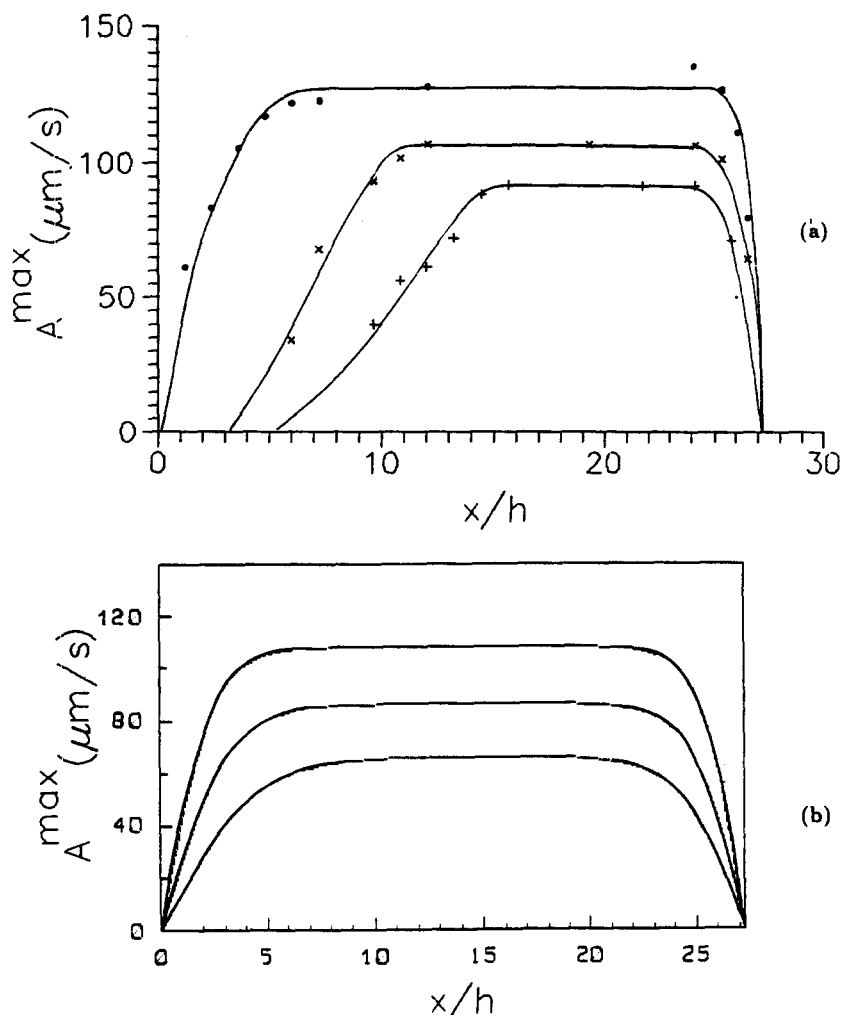


Fig. 14.  $A(x)$  pour  $Re = 0.04 (\pm 0.005)$ ,  $Pr = 6.4$  (en  $y = l/2$  et  $z = h/2$ ). (a) Enveloppes expérimentales : (●)  $Ra = 1842$ , (×)  $Ra = 1805$ , (+)  $Ra = 1774$ . (b) Enveloppes théoriques déduites de l'équation d'amplitude (1) pour les mêmes conditions sur  $Re$  et  $Ra$ .

#### REFERENCES

1. M. T. Ouazzani, J. P. Caltagirone, G. Meyer et A. Mojtabi, Etude numérique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes, *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 261–269 (1989).
2. M. T. Ouazzani, J. K. Platten et A. Mojtabi, Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes II, *Int. J. Heat Mass Transfer* **33**, 1417–1427 (1990).
3. S. H. Davis, Convection in a box : linear theory, *J. Fluid Mech.* **30**, 465–478 (1967).
4. K. Stork and U. Müller, Convection in boxes : experiments, *J. Fluid Mech.* **54**, 499–611 (1972).
5. J. M. Luijkx, Influence de la présence de parois latérales sur l'apparition de la convection libre, forcée et mixte, Thèse de Doctorat, Université de Mons (1983).
6. R. J. Deissler, Spatially growing waves, intermittency, and convective chaos in an open flow system, *Physica* **25D**, 233–260 (1987).
7. R. J. Deissler, External noise and the origin and dynamics of structure in convectively unstable systems, *J. Statist Phys.* **54**, 1459 (1989).
8. H. W. Müller, Thermische Konvektion in horizontaler Scherströmung, Ph.D. Thesis, Universität des Saarlandes (1990).
9. H. W. Müller, M. Lücke and M. Kamps, Convective patterns in horizontal flows, *Europhys. Lett.* **10**(5), 451–456 (1989); *Phys. Rev.* **A45**, 3714 (1992).
10. J. K. Platten and J. C. Legros, *Convection in Liquids*. Springer-Verlag, New York (1984).
11. J. M. Luijkx, J. K. Platten and J. C. Legros, Precise measurements of the wavelength at the onset of Rayleigh–Benard convection in a long rectangular duct, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 1252–1254 (1982).
12. K. L. Babcock, G. Ahlers and D. S. Cannell, Noise-sustained structure in Taylor–Couette flow with through flow, *Phys. Rev. Lett.* **67**(24), 3388–3391 (1991).
13. A. Tsameret and V. Steinberg, Noise-modulated propagating pattern in a convectively unstable system, *Phys. Rev. Lett.* **67**(24), 3392–3395 (1991).
14. J. M. Chomaz, P. Huerre and L. G. Redekopp, Bifurcation to local and global modes in spatially developing flows, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 25 (1988).
15. H. R. Brand, R. J. Deissler and G. Ahlers, Simple model for the Bénard instability with horizontal flow near threshold, *Phys. Rev. A* **43**(8), 4262–4268 (1991).
16. H. W. Müller, M. Tveitereid and S. Trainoff, Rayleigh–

- Bénard problem with imposed weak through-flow: two coupled Ginzburg–Landau equations, *Phys. Rev. E* **48**(1), 263–272 (1993).
17. M. T. Ouazzani, J. K. Platten and A. Mojtabi, Competing patterns in mixed convection, *Appl. Sci. Res.* **51**, 677–685 (1993).

#### STUDY OF MIXED CONVECTION BETWEEN TWO HORIZONTAL PLANES AT DIFFERENT TEMPERATURES

Using laser-Doppler anemometry, we experimentally show that the instability of the rest state in the problem of mixed convection (i.e. free and forced) cannot be favorably compared with the theoretical curve corresponding to neutral stability, but compares rather well with the convective instability curve. Subsequently, we measure the velocity amplitude in the thermoconvective rolls at different locations in the direction of the main flow, and compare with the prediction of an amplitude equation, describing idealized two-dimensional dynamics.